✚ El desarrollo del pensamiento multiplicativo.

Análisis de las diferentes situaciones multiplicativas, su aplicación en el aula y en el desarrollo del pensamiento matemático.

Autor: Mery Aurora Poveda, asesora especializada de Fucai para los proyectos de la Fundación Promigas.

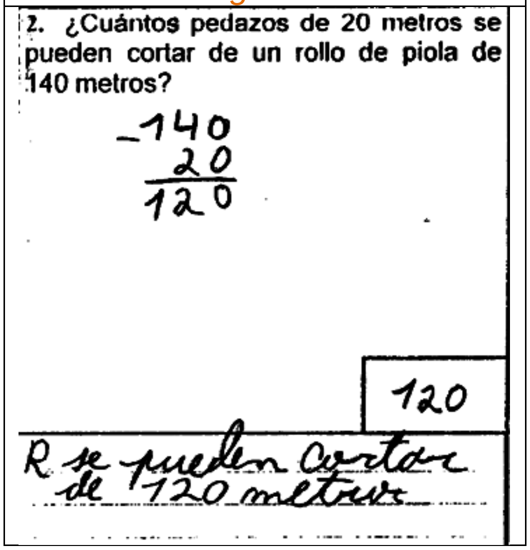
El enfoque utilizado por la escuela para el desarrollo del pensamiento multiplicativo ha respondido a la concepción de matemática y a la concepción de aprendizaje que se tienen explícita o implícitamente.

Así, al considerar la matemática como un producto acabado y no como un conocimiento que se construye históricamente, usualmente pensamos que la función de la escuela es enseñar los algoritmos de la multiplicación y la división ya formalizados e inventados por los matemáticos para que los estudiantes los apliquen en los problemas que los necesitaran.

Además, al pensar que los niños aprenden acumulando y reproduciendo las explicaciones dadas por el profesor y que en el proceso de aprendizaje se va de las partes al todo, se considera que antes de resolver problemas los niños deben aprender los algoritmos (procedimientos para hacer “las operaciones”), pero que para aprender a “multiplicar” (a realizar el algoritmo) hay que aprenderse antes las tablas y que para aprender a “dividir” hay que aprender primero a “multiplicar”.

Con esta forma de proceder se ignora todo el desarrollo que tiene el estudiante, producto de estar enfrentándose continuamente a problemas propios de la vida cotidiana, aunque la escuela no haya abordado “el tema” y no se sepa las tablas; además, al priorizar la memorización de las tablas y algoritmos sobre su significado y comprensión, para muchos estudiantes resulta difícil establecer la conexión entre el algoritmo y el problema y las relaciones que existen entre la multiplicación y división. Por eso es usual encontrar niños que ante un problema multiplicativo preguntan cuál algoritmo hacer o hacen cualquiera de los algoritmos que conocen con los números dados en el problema, sin entender lo que significan los números dentro del algoritmo. (Fig.1 y Fig. 2).

Figura 1

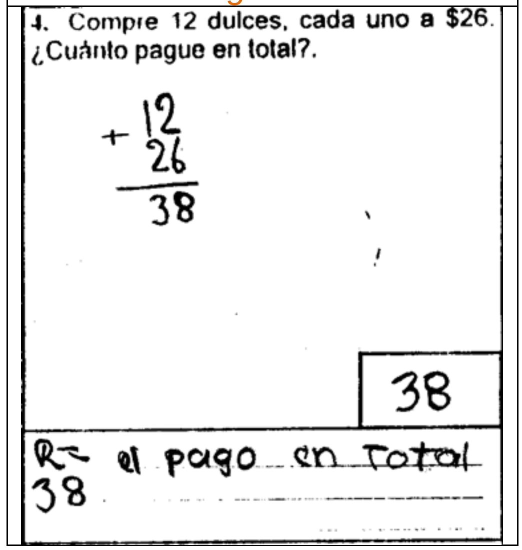

2. ¿Cuántos pedazos de 20 metros se pueden cortar de un rollo de piola de 140 metros?

$$\begin{array}{r} -140 \\ 20 \\ \hline 120 \end{array}$$

120

R se pueden cortar de 120 metros

Figura 2


4. Compre 12 dulces, cada uno a $26. ¿Cuánto pague en total?.

$$\begin{array}{r} +12 \\ 26 \\ \hline 38 \end{array}$$

38

R= el pago en total 38

Hoy se reconoce que al igual que ha pasado con la humanidad, los niños desarrollan el esquema multiplicativo a través de enfrentar situaciones que lo implican y que, al hacerlo, van haciendo generalizaciones en relación con su estructura y usan representaciones de diferente nivel de complejidad dependiendo de los niveles de comprensión que hayan alcanzado; estas representaciones no siempre son reconocidas y valoradas suficientemente por la escuela debido a que los argumentos y procedimientos usados por los niños al comienzo, distan mucho de los algoritmos o procedimientos formales.

La estructura de las situaciones multiplicativas simples:

En los estudios de didáctica de la matemática (Castaño, J. 1996; Casasbuenas, C. 2011; Vergnaud, G. 1983; Maza, C.1991; Castro y Rico ,1996) se reconocen al menos tres tipos de problemas o situaciones que implican una sólo y sólo una operación multiplicativa[1]: unas situaciones de razón o proporcionalidad (o de isomorfismo de medidas), las situaciones de comparación (o producto escalar o factor multiplicante) y las situaciones de combinatoria (producto de medidas o producto cartesiano).

Las situaciones de razón o proporcionalidad:

Son aquellas situaciones en las que existe una relación proporcional entre dos magnitudes, pero el esquema de proporcionalidad se particulariza porque uno de los términos implicados es uno; la razón es referida a la unidad.

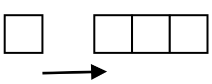
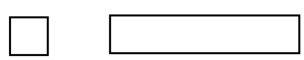
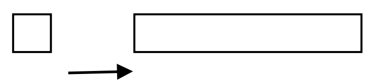
En este tipo de situaciones es posible encontrar tres posibilidades:

[1] Aunque se consideran otros problemas llamados de conversión (por ser del tipo de problemas que permite convertir unas unidades en otras en los procesos de medición), en la mayoría de los casos los que pueden abordarse en la educación Primaria pueden ser transformados en problemas de razón (Maza, C 1991)

Multiplicativa directa: Encontrar el total	Multiplicativa inversa: Número de unidades (de a…, división cuotitiva)	Multiplicativa inversa: valor de la unidad (entre…, división partitiva)
		
A cada bruja le corresponden sólo 4 sombreros; ¿cuántos sombreros se necesitan para las 3 brujas?	A cada bruja le corresponden sólo 4 sombreros; ¿para cuántas brujas alcanzan 12 sombreros?	Si hay 12 sombreros para tres brujas y a cada una se le asigna la misma cantidad, ¿cuántos sombreros le corresponden a cada una?

Situaciones de comparación, factor multiplicante o producto escalar

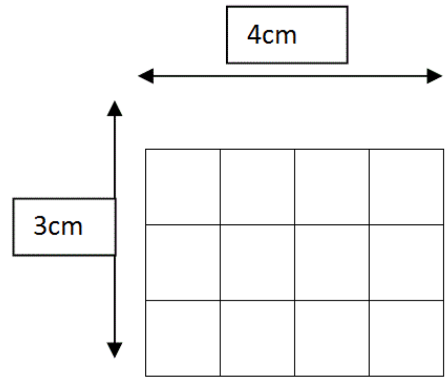
Son aquellas situaciones en la que se establecen relaciones multiplicativas entre objetos o eventos a través de la amplificación o reducción de una misma magnitud, mediante un escalar o cuantificador. En este tipo de situaciones pueden presentarse tres posibilidades:

Multiplicativa directa: Amplificación de la magnitud	Multiplicativa inversa: Hallar el cuantificador	Multiplicativa inversa: Reducción de la magnitud
 **4ℓ 3X = ?……**	 **4 ℓ……X? =……..20ℓ**	 **¿? …X6=…..24ℓ**
Pedro tiene 4 cm de agua y María 3 veces más, ¿cuánta agua tiene José?	Pedro tiene 4 litros de agua y María 20. ¿Cuántas veces más de agua tiene María con relación a Pedro?	María tiene 24 litros, 6 veces más que Pedro. ¿Cuántos litros de agua tiene Pedro?

Situaciones de combinatoria o producto cartesiano

Son aquellas situaciones en las que se realiza el producto cartesiano entre dos magnitudes o conjuntos para obtener un tercero.

CHICLES	FRESA	CANELA	MENTA	YERBABUENA
LAMINAS				
PASTILLAS				
BOLAS				



En este caso se presentan dos posibilidades:

La situación multiplicativa directa: donde se tiene la composición de los conjuntos o valores de las dos magnitudes y se necesita hallar la combinatoria de los dos conjuntos o el producto de las dos magnitudes: “Hay tres tipos de presentaciones de chicles y cuatro sabores diferentes. ¿Cuántos tipos de chicles resultan de combinar la presentación con el sabor? Tengo un área rectangular de 4cm de ancho por 3cm de alto. ¿Con cuántos cm^2 se logra cubrir completamente? (¿Cuál es el área?)”.

La situación multiplicativa inversa: Donde se conoce una de las magnitudes o composición de uno de los conjuntos y el producto cartesiano, y se desconoce una de las magnitudes o los elementos de uno de los conjuntos: “Hay 3 tipos de presentación de chicles y se quieren tener 15 variedades entre presentación y sabores. ¿De cuántos sabores diferentes pueden ser los chicles? El área de una hoja rectangular es de $20cm^2$. Si uno de los lados es de 5cm, ¿cuánto mide el otro lado?”.

El proceso de los niños en la resolución problemas multiplicativos simples de razón o factor multiplicante

En relación con los conceptos matemáticos y basados en los estudios de Piaget, desde ya hace bastante tiempo se reconoce en los niños las etapas de representación enactiva, gráfica o icónica y simbólica; sin embargo, los estudios posteriores han demostrado que si bien estas etapas se presentan siempre, no son generalizables ni para el desarrollo general del sujeto, ni para todos los conceptos; estas etapas se presentan en el desarrollo de cada concepto en particular y no siempre dependen de la edad, sino de la experiencia y el contexto del sujeto en relación con las situaciones implicadas.

Es por ello que es necesario documentar los procesos de representación usados por los estudiantes al enfrentarse a los diferentes problemas matemáticos con relación a cada subcampo conceptual, y desde allí, analizar los diferentes niveles de desarrollo alcanzados por un estudiante en relación con un concepto determinado. Desde luego, para que los estudiantes puedan aventurarse a realizar representaciones y procedimientos propios es necesaria un aula que los valore, los discuta y los valide en un ambiente de búsqueda colectiva, más allá de la reproducción de los algoritmos y procedimientos formales. No quiere decir que éstos no sean importantes y que no sean objeto de aprendizaje, sino que en lugar de ser el punto de partida, deben ser el punto de llegada después de todo un proceso que permita su comprensión. Además, es importante considerar que los algoritmos formales están basados en el carácter decimal y posicional de las potencias de 10 en nuestro sistema de numeración, por lo que su uso y comprensión por parte de los niños implica avanzar, por un lado, en el reconocimiento de las situaciones multiplicativas (para el caso que estamos considerando), y por otro, en el conocimiento del sistema decimal de numeración.

Con frecuencia en la escuela interpretamos las etapas en las representaciones por las que pasan los niños como momentos de una clase en la que dejamos un espacio para manipulación de material concreto, luego en la misma clase representamos con dibujos, debajo de los dibujos hacemos las sumas repetidas y al final escribimos la multiplicación formalmente; esto es debido a que seguimos considerando el aprendizaje como acumulación y reproducción de un modelo y por eso creemos que si el alumno vive esos momentos en una clase, al final de ella ya puede entender y reproducir lo que el profesor le mostró. Pero estas etapas no se pueden seguir interpretando de ese modo; es como si dijéramos que para enseñar a caminar a un niño en una sesión de una clase le enseñáramos a sentarse, luego a gatear, a caminar apoyado y luego sin apoyo. La experiencia nos hace ver como absurda dicha consideración y aunque esas son las etapas que la cultura ya reconoce en el desarrollo del niño, sabemos que es el niño quien va definiendo cuándo pasa a la siguiente y nosotros estamos prestos a sus señales para brindarles el apoyo necesario de acuerdo con el nivel de desarrollo en que se encuentra.

De la misma manera, para poder apoyar al niño en su proceso de desarrollo del pensamiento multiplicativo es importante no sólo reconocer las etapas por las que pasa, sino **respetar el tiempo que necesita para pasar de una etapa a otra y brindarle los apoyos necesarios de acuerdo con la etapa en que se encuentre**.

A continuación analizaremos diferentes niveles de comprensión alcanzados por los niños en el proceso la solución de problemas multiplicativos de proporcionalidad simple teniendo en cuenta nuestra propia experiencia y los estudios realizados por Castaño, J (1996).

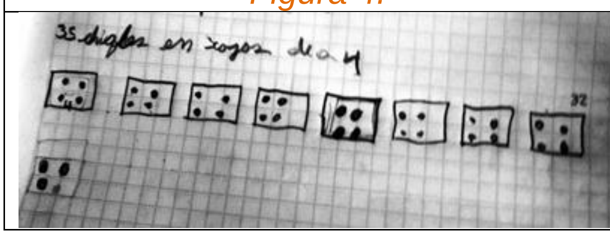
1. Resolución a través de acciones sobre objetos (representaciones enactivas) (Fig. 3). En esta etapa, los niños pueden resolver las situaciones multiplicativas representando las dos magnitudes mediante objetos que les permita hacer las agrupaciones o repartos equitativos. Al comienzo incluso, si se les enuncia verbalmente no entienden la situación pero si se les representa con objetos, la comprenden y proceden a resolverla; un poco más adelante, pueden pasar la enunciación verbal a la representación enactiva por sí mismos.

Figura 3.

En el caso multiplicativo inverso de partición, al comienzo inician repartiendo de 1 en 1 pero luego, de acuerdo con la cantidad involucrada empiezan a repartir por grupos al tanteo de acuerdo con la estimación de lo que les va sobrando.

2. Representaciones icónicas o realistas (Fig. 4): llega un momento en el que los niños ya no necesitan el material real para representar la situación, pero necesitan los dibujos para poder resolverlo; al igual que en la etapa anterior, al comienzo no pueden pasar por sí mismos de la enunciación verbal al gráfico, sino que necesitan que la situación les sea presentada gráficamente.

Figura 4.



3. Representaciones esquemáticas (Fig. 5 y Fig. 6): algunos consideran este un paso intermedio entre el uso de sólo dibujos y la representación simbólica, pues es una forma de representación en la que no aparecen dibujos pero sí representaciones que muestran visualmente las cantidades y los agrupamientos, al comienzo a través de rayitas o punticos (incluso el conteo en los dedos con énfasis sonoro al final de cada agrupamiento podría ubicarse en esta categoría) y después usando números que representan las cantidades consideradas.

Figura 5.

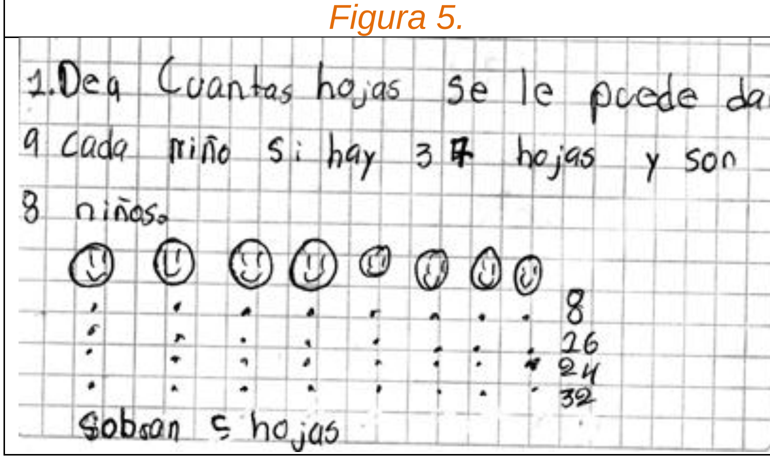
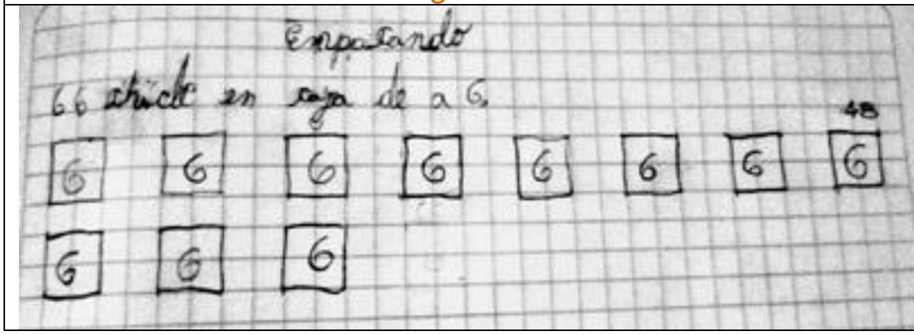


Figura 6.



4. Representaciones aditivas (Fig. 7 y Fig. 8): en esta etapa los niños ya dejan el apoyo visual y empiezan a representarse la situación a través de estrategias aditivas. Al comienzo sin agrupar considerando cada sumando de forma sucesiva y luego estableciendo agrupaciones.

Figura 7.

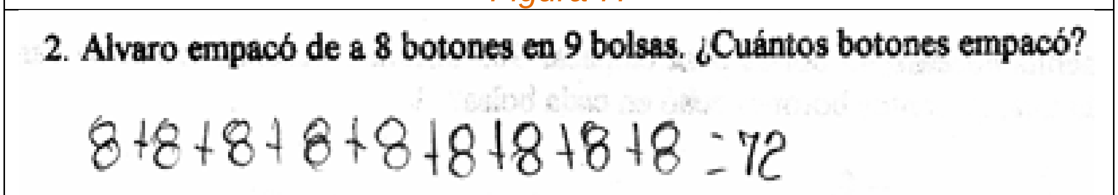
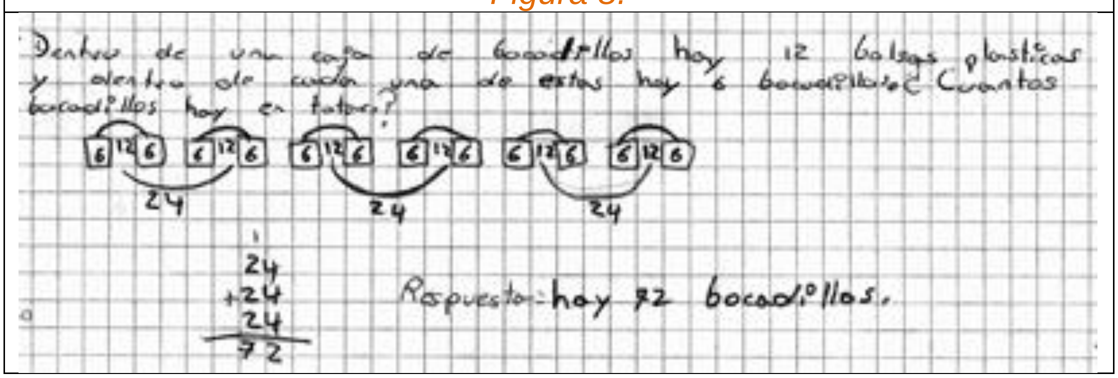
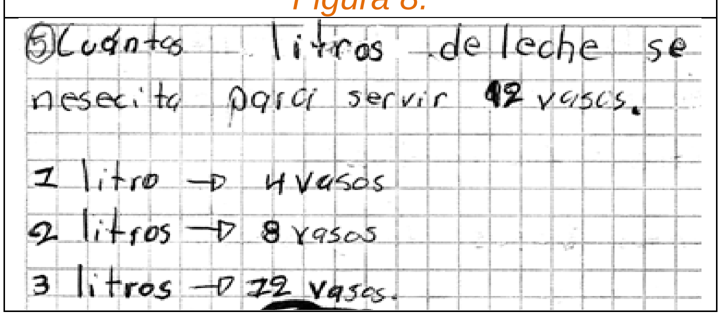


Figura 8.



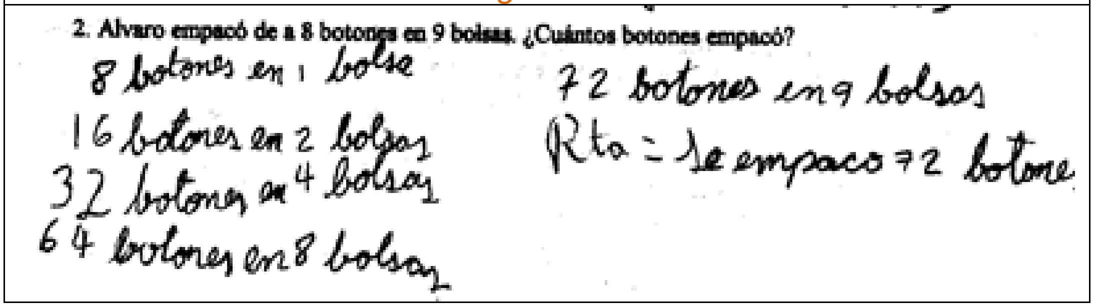
Representaciones de doble conteo: cuando los niños usan este tipo de representación empiezan a considerar la relación de proporcionalidad de manera explícita, es decir la hacen consciente; este tipo de representaciones aparecen generalmente en forma verbal, pero si se anima a los niños a escribir lo que piensan, rápidamente las traducen en representaciones tabulares como la de la Fig. 9.

Figura 8.



6. Representaciones por duplicación (Fig. 10): es en esta etapa donde comienza realmente a manifestarse un pensamiento multiplicativo a través de las duplicaciones sucesivas y el apoyo en resultados parciales de las mismas:

Figura 10.

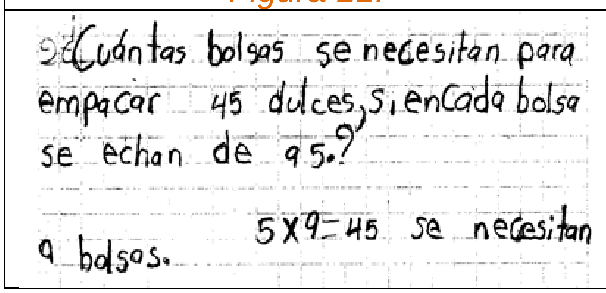


2. Alvaro empacó de a 8 botones en 9 bolsas. ¿Cuántos botones empacó?

8 botones en 1 bolsa
16 botones en 2 bolsas
32 botones en 4 bolsas
64 botones en 8 bolsas
72 botones en 9 bolsas
Rta = se empaco 72 botone

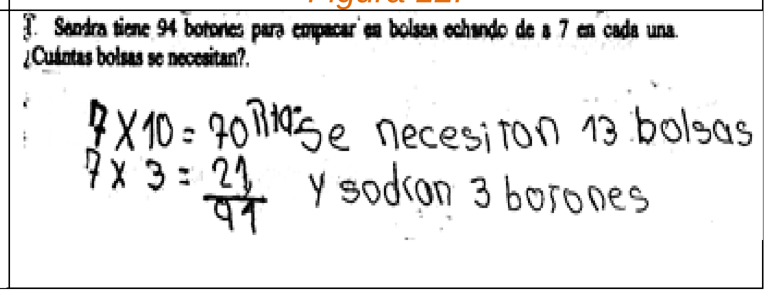
7. Representación multiplicativa (Fig. 11, Fig. 12 y Fig. 13): finalmente los niños logran reconocer la relación multiplicativa entre las cantidades y empiezan a usar multiplicaciones parciales o las tablas de multiplicar para resolver los diferentes problemas multiplicativos; el avance en el sistema decimal de numeración fácilmente los lleva a usar la descomposición decimal para hacer cuentas.

Figura 11.



9. ¿Cuántas bolsas se necesitan para empacar 45 dulces, si en cada bolsa se echan de a 5?
5X9=45 se necesitan 9 bolsas.

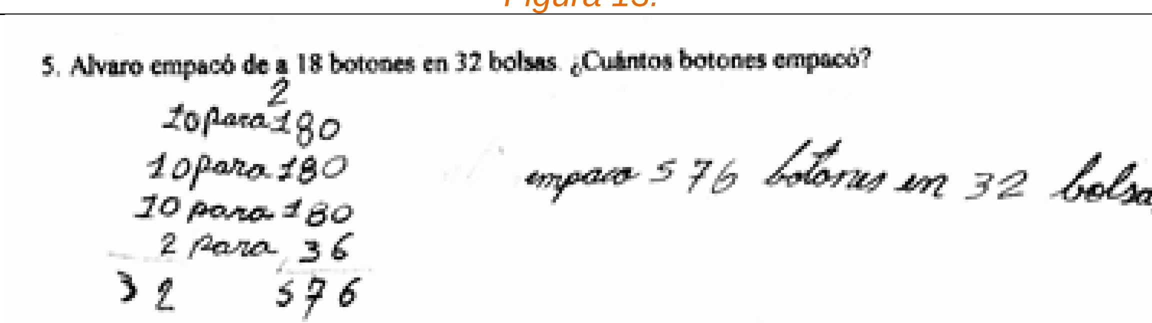
Figura 12.



7. Sandra tiene 94 botones para empacar en bolsas echando de a 7 en cada una. ¿Cuántas bolsas se necesitan?.

7X10 = 70 Rta: se necesiton 13 bolsas
7X3 = 21 y sodron 3 borones
91

Figura 13.



5. Alvaro empacó de a 18 botones en 32 bolsas. ¿Cuántos botones empacó?

10 para 180
10 para 180
10 para 180
2 para 36
32 576

empaco 576 botones en 32 bolsa

Es importante tener en cuenta que en general, los problemas inversos presentan una mayor dificultad para los niños, por lo que en un momento determinado usan representaciones más elementales en éstos, que en los multiplicativos directos; además, cuando pasan a considerar cantidades de un círculo numérico mayor no sólo utilizan estrategias ya superadas en el círculo numérico más pequeño, sino que el dominio que tengan sobre el sistema decimal de numeración determinan las estrategias utilizadas (Fig. 14). En este sentido, como los algoritmos están basados en un dominio bastante alto del sistema decimal de numeración, los niños van encontrando procedimientos alternativos más cercanos a su forma de pensar, pero de ellos hablaremos en otro momento.

Figura 14.